

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Διδάσκοντες: Α. ΤΟΛΙΑΣ, Π. ΤΣΑΜΑΤΟΣ

Εξεταστική περίοδος Ιουνίου 2015

Θέμα 1. [1 μον.]

Αν γνωρίζουμε ότι η πρόταση $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [\sim (q \Leftrightarrow p)]$ είναι ψευδής, να βρείτε ποιες από τις προτάσεις p, q, r είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.

Θέμα 2. [2 μον.]

(α) Αν K, Λ είναι δύο σύνολα, να δείξετε ότι την ισοδυναμία $K \subseteq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \subseteq \Lambda - K$.

(β) Αν A, B, Γ είναι τρία σύνολα, να δείξετε ότι $(A \times \Gamma) - (B \times \Gamma) = (A - B) \times \Gamma$.

(γ) Δίνεται η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $A_1 = \emptyset$ και $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.

Να βρεθεί το σύνολο $\mathcal{P}(A_3)$.

Θέμα 3. [2 μον.]

(α) Να ορίσετε μια σχέση ισοδυναμίας \sim στο σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ η οποία να έχει δύο κλάσεις ισοδυναμίας και να ισχύει $n \not\sim n+1$ για $n = 1, 2, 3, 4$.

(β) Στο σύνολο $A = \{a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ να ορίσετε μια σχέση μερικής διάταξης \leq η οποία να έχει ελάχιστο στοιχείο το a και ακριβώς τρία ψευδομέγιστα, τα γ, δ, ϵ .

(γ) Στο σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής: $x \sigma y \Leftrightarrow x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

Να εξετάσετε αν η σ είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Θέμα 4. [2 μον.]

Εστω $f : K \rightarrow \Lambda$ μια συνάρτηση.

(α) Για $A \subseteq K$ να ορίσετε το σύνολο $f(A)$ και για $B \subseteq \Lambda$ να ορίσετε το σύνολο $f^{-1}(B)$.

(β) Να δείξετε ότι $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ για κάθε $A \subseteq K$ και ότι αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) τότε ισχύει πάντα ισότητα.

(γ) Να δείξετε ότι $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ για κάθε $B \subseteq \Lambda$ και ότι αν η f είναι επί τότε ισχύει πάντα ισότητα.

Θέμα 5. [2 μον.]

(α) Θεωρώντας ως δεδομένο ότι το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι αν $x, y \in \mathbb{N}$ τότε $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

(β) Δίνονται δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ώστε να ισχύει $x < y$. Να δείξετε ότι υπάρχει ρητός αριθμός q και άρρητος αριθμός r ώστε να ισχύει $x < q^2 < r^3 < y$.

Θέμα 6. [2 μον.]

(α) Αν A, B είναι δύο σύνολα, να δοθεί ο ορισμός της σχέσης $A \preceq B$ και να εξετάσετε αν αυτή η σχέση είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

(β) Αν A, B είναι δύο σύνολα και υπάρχει συνάρτηση $f : B \rightarrow A$ επί, να δείξετε ότι $A \preceq B$.

(γ) Αν A είναι ένα απέραντο (άπειρο) σύνολο και a, β, γ τρία (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία του A να δείξετε ότι $A \simeq A - \{a, \beta, \gamma\}$.

Καλή επιτυχία!